I. Angle inscrit – Angle au centre

Activité :

Figure N°1

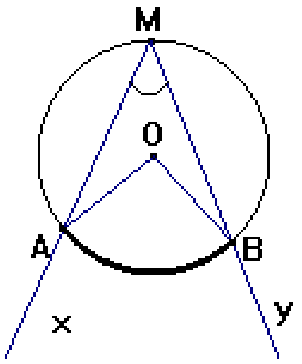


Figure N°2

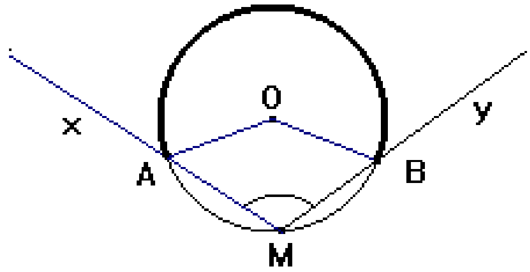


Figure N°3

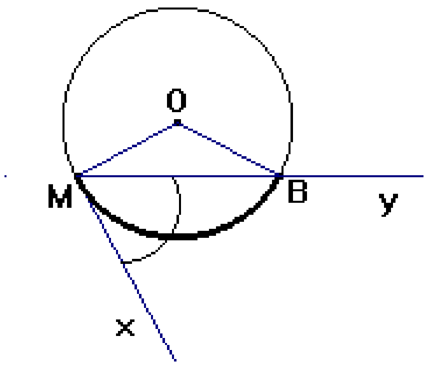
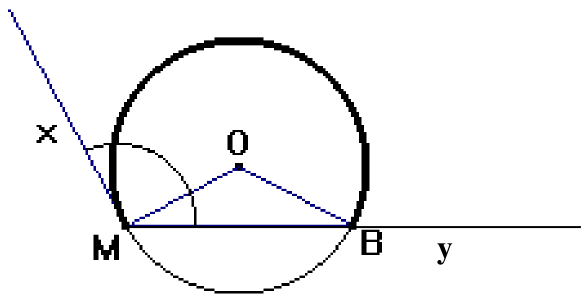


Figure N°4



a) Considérer les figure N°1 et N°2 ; Comparer, dans chaque cas, les mesures des angles $A\hat{M}B$ et $A\hat{O}B$

b) Considérer les figure N°1 et N°2 ; Comparer, dans chaque cas, les mesures des angles $x\hat{M}y$ et $M\hat{O}B$

Définitions

Soit (Mx, My) un angle orienté de demi-droites. On dit que cet **angle est inscrit** dans un cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

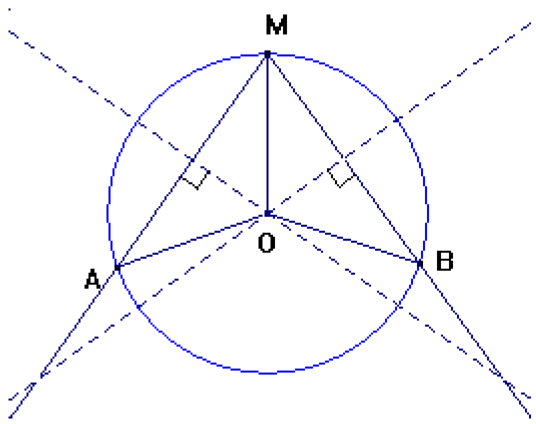
- $M \in \mathcal{C}$
- Les demi-droites [Mx) et [My) recoupent $\mathcal{C}$, l'une des deux pouvant être tangente à $\mathcal{C}$.

Soit (Mx, My) un angle orienté de demi-droites inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Désignons par A et B les points où les demi-droites [Mx) et [My) recoupent $\mathcal{C}$.
L'angle orienté (OA, OB) est appelé **l'angle au centre associé** à l'angle orienté (Mx, My). L'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ est dit **l'arc intercepté** par l'angle inscrit (Mx, My) ainsi que par l'angle au centre (OA, OB).

Activité

Considérons un angle (Mx, My) inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O.

1^er cas : On suppose que les demi-droites [Mx) et [My) recoupent $\mathcal{C}$ respectivement en A et B.
Posons Δ = med[AM] et Δ' = med[BM] et désignons par s la symétrie orthogonale d'axe Δ et par s' la symétrie orthogonale d'axe Δ'.

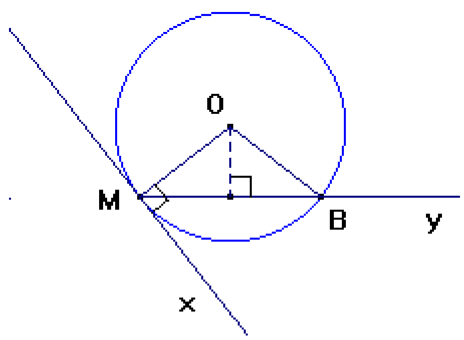


a) Exprimer $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}})$ en fonction de $(\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}})$.

b) Exprimer $(\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}})$ en fonction de $(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO}})$.

c) En utilisant la relation de Chasles, déduire les égalités équivalentes : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})[2\pi]$ &
$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{1}{2}(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})[\pi]$

2^e cas : l'une des demi-droites ([Mx) par exemple) est tangente au cercle $\mathcal{C}$.



a) Exprimer $2(\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{My}})$ en fonction de $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}})$.

b) Déduire alors l'égalité : $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{Mx}, \overrightarrow{MB}})[2\pi]$

Théorème :

> Soient (Mx, My) un angle orienté de demi-droites inscrit dans un cercle centre O et (OA, OB) l'angle au centre associé. L'activité précédente prouve les assertions équivalentes suivantes :
>
> ➢ $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{Mx}, \overrightarrow{My}})[2\pi]$

➤ $(\overrightarrow{Mx}\,\hat{,}\,\overrightarrow{My}) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB})[\pi]$

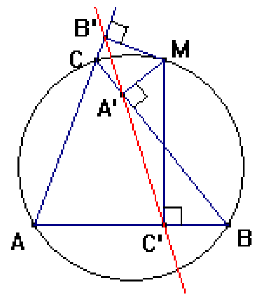
<u>Exercice N°1</u> (droite de Simson)

Soient ABC un triangle et M un point du plan ; on désigne par A', B' et C' les projetés respectifs de M sur les droites (BC), (AC) et (AB). $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC.

1) On se propose d'établir l'équivalence : A', B' et C' sont alignés ⇔ M∈ $\mathcal{C}$

Remarquons que si M∈{A, B, C} alors le résultat est évident ; on suppose dans la suite que M∉{A, B, C}

a) Montrer que les points A', B', C et M sont cocycliques.
b) Montrer que les points A', B, C' et M sont cocycliques.
c) Exprimer $(\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'})$ en fonction de $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})$ et $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA})$
d) Conclure.



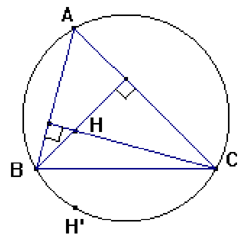
<u>Commentaire :</u> la droite joignant les points A', B' et C'est appelée droite de **<u>Simson</u>** relative au point M.

2) Montrer que les droites de Simson relatives à deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$ sont perpendiculaires.

<u>Exercice N°2</u>

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ et d'orthocentre H. On désigne par H' le symétrique de H par rapport à (BC).

a) Comparer $(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C})$ et $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})$.
b) Comparer $(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
c) En déduire que H'∈ $\mathcal{C}$.



<u>NB :</u> On a ainsi démontré dans cet exercice que le symétrique de l'orthocentre d'un triangle par rapport à tout côté de ce triangle appartient au cercle circonscrit à ce triangle.

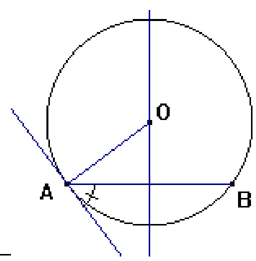
III. Ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ $\theta[\pi]$

Soient A et B deux points distincts donnés du plan P et θ un réel donné ; on se propose de déterminer l'ensemble : Γ = { M∈P tel que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ $\theta[\pi]$ }.

Remarquons d'abord que si un tel point existe alors il est distinct de A et B.

1) On suppose que θ = kπ, k∈Z. Déterminer Γ.
2) On suppose que θ ≠ kπ, k∈Z.

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ $\theta[\pi]$ et Δ la droite passant par A et dont un vecteur Directeur est $\vec{u}$ .On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle passant par A et B et tangent en A à la droite Δ.



a) Reproduire la figure ci contre, en précisant la méthode de construction du centre O de $\mathcal{C}$.

b) Soit M un point de $\mathcal{C}\setminus\{A, B\}$. Evaluer $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et en déduire que $\mathcal{C}\setminus\{A, B\} \subset \Gamma$.

c) Soit M un point de Γ et N un point de $\mathcal{C}\setminus\{A, B\}$; Montrer que les points A, B, M et N sont cocycliques et en déduire que $\Gamma \subset \mathcal{C}\setminus\{A, B\}$.

d) Conclure.

Théorème :

A et B étant deux points distincts et θ un réel donné ; l'ensemble $\Gamma = \{M\in P / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad \theta[\pi]\}$ est :

- Si $\theta = k\pi$, $k\in$, alors $\Gamma = (AB) \setminus \{A, B\}$
- Si $\theta \neq k\pi$, $k\in$, alors $\Gamma = \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$; où $\mathcal{C}$ est le cercle passant par A et B et tangent en A à la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \quad \theta[\pi]$

Exercice N°3

Soient A et B deux points fixes et M un point variable tel que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad \frac{\pi}{4}[\pi]$

Déterminer l'ensemble des points M' tel que MABM' soit un parallélogramme.

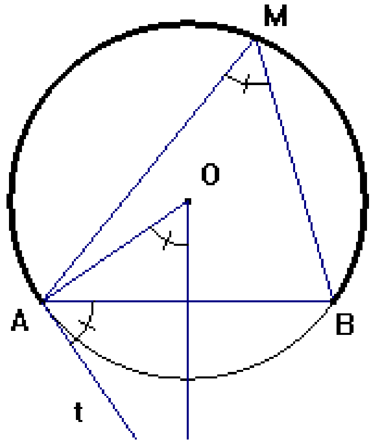
Exercice N°4

On donne un segment [AB] et un point O de ce segment. On prend un point M variable sur la médiatrice Δ de [OA] et un point N variable sur la médiatrice Δ' de [OB] tel que : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \quad \frac{\pi}{2}[\pi]$

Les droites (AM) et (BN) se coupent en I. Quel est l'ensemble des points I ?

IV. Ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad \theta[2\pi]$

Soient A et B deux points distincts donnés du plan P et θ un réel donné ; on se propose de déterminer l'ensemble : $\Gamma' = \{ M\in P$ tel que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad \theta[2\pi] \}$.



Remarquons d'abord que si un tel point existe alors il est distinct de A et B.

1) On suppose que $\theta = 2k\pi$, $k\in \mathbb{Z}$. Déterminer Γ'.
2) On suppose que $\theta = \pi + 2k\pi$, $k\in \mathbb{Z}$. Déterminer Γ'.
3) On suppose que $\theta \neq k\pi$, $k\in \mathbb{Z}$.

Soit Γ l'ensemble défini dans le paragraphe précédent.

a) Vérifier que $\Gamma' \subset \Gamma$.

b) Soient [At) la demi-droite telle que $(\overrightarrow{At}, \overrightarrow{AB}) \quad \theta[2\pi]$ et M un point Γ ; exprimer ,en fonction de θ, $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ dans chacun des cas suivant :

✓M appartient à l'arc $[\overset{\frown}{AB}]$ de Γ situé dans le demi-plan de frontière (AB) contenant [At).

✓M appartient à l'arc $[\overset{\frown}{AB}]$ de Γ situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas [At).

c) Conclure.

Théorème :

A et B étant deux points distincts et θ un réel donné ; l'ensemble Γ' = { M∈ P / $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ $\theta[2\pi]$ } est :

- Si θ = 2kπ, k∈ , alors Γ' = (AB) \ [AB]
- Si θ = π + 2kπ, k∈ , alors Γ' = [AB] \ {AB}=]AB[
- Si θ ≠kπ, k∈ , alors Γ' est l'arc du cercle passant par A et B et tangent en A à la demi-droite [At) vérifiant $(\overrightarrow{At},\overrightarrow{AB})$ $\theta[2\pi]$, situé dans le demi-plan de frontière (AB) et ne contenant pas[At)

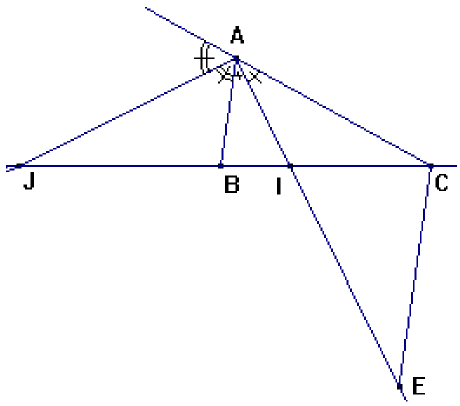
Exercice N°5

On considère deux points B et C du plan P. Construire un point A de P tel que : $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})$ $\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC})$ $\frac{3\pi}{4}[2\pi]$; I étant le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC.

V. Ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB}=k$, k∈ $^{*}_{+}$

1/ Loi des bissectrices

Soit ABC un triangle non isocèle en A. Les bissectrices intérieure et extérieure du secteur [AB, AC] coupe (BC) respectivement en I et J.



a) La parallèle à (AB) passant par C coupe [AI) en E.
- Montrer que le triangle AEC est isocèle.
- Montrer que : $\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{CE}$.
- En déduire l'égalité : $\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}=-\frac{AB}{AC}$

b) Montrer, à laide d'un raisonnement analogue que : $\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}=\frac{AB}{AC}$

Théorème

Dans un triangle ABC non isocèle en A ; les bissectrices intérieure et extérieure du secteur [AB, AC] coupe (BC) respectivement en I et J tel que : $\frac{\overline{IB}}{\overline{IC}}=-\frac{AB}{AC}$ et $\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}=\frac{AB}{AC}$

2/ Ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB}=k$, k∈ $^{*}_{+}$

Soient A et B deux points distincts du plan P et k un réel strictement positif.

On pose $\mathcal{E} = \{M \in P \,/\, \frac{MA}{MB} = k\}$; on sait déjà (cours : produit scalaire) que :

- Si k = 1 alors $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment [AB].
- Si k≠1 alors $\mathcal{E}$ est le cercle de diamètre [IJ] ; où I est le barycentre des points pondérés (A,1) et (B, k) et J est le barycentre des points pondérés (A,1) et (B,-k)

Supposons que k≠1.

Etablir les égalités : $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}} = -k$ et $\frac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = k$.

Soit Ω un point de $\mathcal{E}$; vérifier que I et J sont les points d'intersection respectifs des bissectrices intérieure et extérieure du secteur [ΩA, ΩB] avec la droite (AB) .

Exercice N°6

Soient A et B deux points fixes d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et I un point variable de C. Les tangentes à $\mathcal{C}$ respectivement en A et B coupent la tangente à $\mathcal{C}$ en I respectivement en M et N.

On pose {J}= (AM)∩(BN). On se propose de montrer que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \quad \alpha[\pi]$ où α est une constante que l'on précisera.

a) Montrer que les points O, A, J et M sont cocycliques.
b) Montrer que les points O, B, J et N sont cocycliques.
c) Montrer que les points O, A, I et B sont cocycliques.
d) Conclure.

Exercice N°7

On considère un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. M étant un point quelconque $\mathcal{C}$ ($M \notin \{A, B, C\}$) , on désigne par A' et C' ses projetés orthogonaux respectifs sur (BC) et (AB). La droite (MA') recoupe $\mathcal{C}$ en A''. Montrer que la droite (AA'') est parallèle à la droite (A'C')

Exercice N°8

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' deux cercles sécants en A et B. Une droite variable Δ passant par A coupe $\mathcal{C}$ en P et $\mathcal{C}$ 'en Q. On prend sur $\mathcal{C}$ un point fixe I et sur $\mathcal{C}$ ' un point fixe J. Les droite (IP) et (JQ) se coupent en M.

1) Montrer que les points M, I, J et B sont cocycliques.
2) Quel est l'ensemble des points M lorsque Δ varie ?